

0.1 Morita Equivalence for groupoids

まず groupoid の定義をするが、ここでは small groupoid しか考えないことにする。通常は morphism がすべて isomorphism であるような category をさすのだが、その定義を少し言い換えておく。

Definition 0.1.1

C : small category とは、二つの集合 C_0 (object), C_1 (morphism) と、source map、target map と呼ばれる 2 つの写像

$$s, t : G_1 \longrightarrow G_0$$

と、composition map と呼ばれる

$$\mu : G_1 \times_{\text{com}} G_1 \longrightarrow G_1$$

そして、identity map と呼ばれる

$$i : C_0 \longrightarrow C_1$$

が与えられ、次の条件を満たすときをさす。ただし、

$$G_1 \times_{\text{com}} G_1 = \{(g, f) \in G_1 \times G_1 \mid t(f) = s(g)\}$$

であり、 $\mu(g, f) = g \circ f$ あるいは、 gf とかき、 $i(X) = id_X$ とかく。

1. $s(gf) = s(f)$, $t(gf) = t(g)$, $h(gf) = (hg)f$
2. $s \circ i = t \circ i = id_{C_0}$
3. 任意の $f \in G_1$ に対し、

$$f = f \circ i(s(f)) = i(t(f)) \circ f$$

さらに上記の条件に加え、

$$\nu : C_1 \longrightarrow C_1$$

が与えられ、次の条件を満たすとき、 C を C_0 上の Groupoid と呼ぶ。 $\nu(f) = f^{-1}$ とかく。

4. $s(f^{-1}) = t(f)$, $t(f^{-1}) = s(f)$, $f^{-1} \circ f = i \circ s(f)$, $f \circ f^{-1} = i \circ t(f)$

このとき、 $C : C_1 \rightrightarrows C_0$ と書いたりする。

Example 0.1.2 *Group*

任意の群は、1 点 $\{*\}$ 上の Groupoid である。

Example 0.1.3 *Pair Groupoid*

集合 X に対し、その直積を $G_1 = X \times X$ とおく。このとき、

$$s, t : X \times X \longrightarrow X$$

をそれぞれ、 $s(x, y) = y$, $t(x, y) = x$ とし、

$$\mu : (X \times X) \times_{\text{com}} (X \times X) \longrightarrow X \times X \quad (x, y; y, z) \mapsto (x, z)$$

さらに、

$$i : X \longrightarrow X \times X \quad x \mapsto (x, x) \quad , \quad \nu : X \times X \longrightarrow X \times X \quad (x, y) \mapsto (y, x)$$

で定義すれば X 上の Groupoid となる。これを pair groupoid、あるいは coarse groupoid と呼ぶ。

Example 0.1.4 *Action Groupoid*

集合 X に群 G が (左から) 作用しているとき、

$$s, t : G \times X \longrightarrow X$$

をそれぞれ、 $s(g, x) = x$, $t(g, x) = gx$ とし、

$$\mu : G \times X \times_{\text{com}} G \times X \longrightarrow G \times X \quad (g, x = hy; h, y) \mapsto (gh, y)$$

さらに、

$$i : X \longrightarrow G \times X \quad x \mapsto (e, x) \quad , \quad \nu : G \times X \longrightarrow G \times X \quad (g, x) \mapsto (g^{-1}, gx)$$

で定義すれば、これは X 上 Groupoid であり、 G の Action Groupoid と呼ぶ。

proof) $s((g, x)(h, y)) = s(gh, y) = y = s(h, y)$

$$t((g, x = hy)(h, y)) = t(gh, y) = (gh)y = g(hy) = t(g, x)$$

$$((g, x = hy)(h, y = kz))(k, z) = (gh, y)(k, z) = (ghk, z)$$

$$(g, x)((h, y)(k, z)) = (g, x)(hk, z) = (ghk, z)$$

なので、 $(g, x)((h, y)(k, z)) = ((g, x)(h, y))(k, z)$ である。

$$s \circ i(x) = s(e, x) = x, \quad t \circ i(x) = t(e, x) = x$$

また、 (g, x) に対し、

$$(g, x)(is(g, x)) = (g, x)i(x) = (g, x)(e, x) = (g, x)$$

$$i(t(g, x))(g, x) = i(gx)(g, x) = (e, gx)(g, x) = (g, x)$$

そして、

$$s(g, x)^{-1} = s(g^{-1}, gx) = gx = t(g, x), \quad t(g, x)^{-1} = t(g^{-1}, gx) = x = s(g, x)$$

である。さらに、

$$(g, x)^{-1}(g, x) = (g^{-1}, gx)(g, x) = (e, x) = i(x) = i \circ s(g, x)$$

$$(g, x)(g, x)^{-1} = (g, x)(g^{-1}, gx) = (e, gx) = i(gx) = i \circ t(g, x)$$

Definition 0.1.5

X を集合とし、 $G : G_1 \rightrightarrows G_0$ を Groupoid としたとき、写像

$$\rho : X \longrightarrow G_0$$

が与えられているとする。このとき、

$$G * X = \{(g, x) \in G_1 \times X \mid s(g) = \rho(x)\}$$

で定義し ($G_1 \xrightarrow{s} G_0 \xleftarrow{\rho} X$ の pull back)、 $G * X \longrightarrow X \quad (g, x) \mapsto gx$ という写像が与えられ、次を満たすときこの写像を G による X への左作用と呼ぶ。

1. $\rho(gx) = t(g) \quad \text{for all } (g, x) \in G * X$
2. $(gh)x = g(hx) \quad \text{for all } g, h \in G, x \in X$
3. $(i\rho(x))x = x \quad \text{for all } x \in X$

このとき、 $\rho : X \longrightarrow G_0$ を moment map と呼ぶ。同様に、右作用も、

$$X * G = \{(x, g) \in X \times G_1 \mid t(g) = \rho(x)\}$$

と定義し、写像 $X * G \longrightarrow X$ が次の条件を満たすときそう呼ばれる。

1. $\rho(xg) = s(g)$ for all $(x, g) \in X * G$
2. $x(gh) = (xg)h$ for all $g, h \in G_1$, $x \in X$
3. $x(i\rho(x)) = x$ for all $x \in X$

Example 0.1.6

任意の Groupoid である $G : G_1 \rightrightarrows G_0$ に対し、 $X = G_1$ とおき、

$$t : X = G_1 \longrightarrow G_0$$

を target map とする。このとき、 $G * X = G_1 \times_{\text{com}} G_1$ であるため、

$$\rho : G * X = G_1 \times_{\text{com}} G_1 \longrightarrow G_1 = X$$

を composition map とすれば、これは G の G_1 への左作用である。

proof) 任意の $g, h \in G_1$, $x \in X = G_1$ に対し、target map の定義から、 $t(gx) = t(g)$ であり、composition map の定義から、 $(gh)x = g(hx)$ である。そして、identity map の定義から、 $i(t(x))x = x$ である。

□

Corollary 0.1.7

任意の Groupoid である $G : G_1 \rightrightarrows G_0$ に対し、 $X = G_1$ とおき、

$$s : X = G_1 \longrightarrow G_0$$

を target map とする。このとき、 $X * G = G_1 \times_{\text{com}} G_1$ であるため、

$$\rho : X * G = G_1 \times_{\text{com}} G_1 \longrightarrow G_1 = X$$

を composition map とすれば、これは G の G_1 への右作用である。

Definition 0.1.8

集合 X に Groupoid である $G : G_1 \rightrightarrows G_0$ と $H : H_1 \rightrightarrows H_0$ がそれぞれ左と右から作用していて、なおかつその作用が可換であるとき、つまり

$$G * X * H = \{(g, x, h) \in G \times X \times H \mid s(g) = \rho(x) = \rho(xh), t(h) = \sigma(x) = \sigma(gx)\}$$

と定義するとき、

$$\begin{array}{ccc} G * X * H & \longrightarrow & G * X \\ \downarrow & & \downarrow \\ X * H & \longrightarrow & X \end{array}$$

が可換となることである。ここで、 $G_0 \xleftarrow{\rho} X \xrightarrow{\sigma} H_0$ はそれぞれの moment map であり、このとき X を (G, H) -bibundle と呼ぶ。

このとき任意の $x \in X$ に対し、 H からの action を制限すると、

$$\rho^{-1}(x) \times H \longrightarrow X$$

$$\rho(yh) = \rho((i\rho(y)y)h) = \rho(i\rho(y)(yh)) = t(i\rho(y)) = \rho(y) = x$$

であるので、

$$\rho^{-1}(x) \times H \longrightarrow \rho^{-1}(x)$$

となり、これはまた action となる。ここで左作用の moment map である $\rho : X \rightarrow G_0$ が全射で、各ファイバー $\rho^{-1}(x)$ に対し、 H が自由かつ推移的に作用しているとき、 X は right principal であると呼ぶ。逆に右作用の moment map が全射で各ファイバーに G が自由かつ推移的に作用しているときは left principal と呼ぶ。

Definition 0.1.9

2つの (G, H) -bibundle である、 $G_0 \xleftarrow{\rho} X \xrightarrow{\sigma} H_0$ と、 $G_0 \xleftarrow{\rho'} Y \xrightarrow{\sigma'} H_0$ に対し、 $f : X \rightarrow Y$ が、

$$\begin{array}{ccccc} G_0 & \xleftarrow{\rho} & X & \xrightarrow{\sigma} & H_0 \\ \downarrow = & & \downarrow f & & \downarrow = \\ G_0 & \xleftarrow{\rho'} & Y & \xrightarrow{\sigma'} & H_0 \end{array}$$

を可換にし、このとき $1 * f : G * X \longrightarrow G * Y$ を $(g, x) \mapsto (g, f(x))$ で定義するとこれは well defined となり、さらに

$$\begin{array}{ccccc}
 G * X & \xrightarrow{\text{act}} & X & \xleftarrow{\text{act}} & X * H \\
 \downarrow 1 * f & & \downarrow f & & \downarrow f * 1 \\
 G * Y & \xrightarrow{\text{act}} & Y & \xleftarrow{\text{act}} & H_0
 \end{array}$$

の図式を可換にする時、 $f : X \longrightarrow Y$ は bibundle 間の写像と呼び全単射の時同型と呼ぶ。

Remmark 0.1.10

Bibundle の同型は集合の間の同値関係である。

proof) 逆写像も 2 つの図式を可換にすることは簡単に示せるため。

□

Definition 0.1.11

2 つの Groupoid である $G : G_1 \rightrightarrows G_0$ と $H : H_1 \rightrightarrows H_0$ が Morita equivalent であるとは、それぞれの作用に関して left principal かつ right principal であるような (G, H) -bibundle が存在することである。

Definition 0.1.12

Groupoid である $G : G_1 \rightrightarrows G_0$ が transitive であるとは、任意の $x, y \in G_0$ に対し、 $g \in G_1$ が存在し、 $s(g) = x$, $t(g) = y$ となることである。

Example 0.1.13

$G : G_1 \rightrightarrows G_0$ を Groupoid としたとき、 G_0 の任意の点 $x \in G_0$ において、

$$\Gamma_x : s^{-1}(x) \cap t^{-1}(x) \rightrightarrows \{x\}$$

は Groupoid (Group) である。ただし structure map 等はすべて G の制限による。このとき、 G が transitive ならば、 G と Γ_x は Morita equivalent である。

proof) まず $s^{-1}(x)$ が (Γ_x, G) -bibundle であることを示す。

まず $s^{-1}(x) \longrightarrow \{x\}$ において、

$$s^{-1}(x) \cap t^{-1}(x) * s^{-1} = s^{-1}(x) \cap t^{-1}(x) \times s^{-1}(x)$$

であり、action を

$$s^{-1}(x) \cap t^{-1}(x) \times s^{-1}(x) \longrightarrow s^{-1}(x)$$

を $(g, h) \mapsto hg^{-1}$ で定義する。これは、

$$s(gh) = s(hg^{-1}) = s(g^{-1}) = t(g)$$

であり、また、

$$(g_1g_2)h = h(g_1g_2)^{-1} = (hg_2^{-1})g_1^{-1} = (g_2h)g_1^{-1} = g_1(g_2h)$$

さらに

$$is(h)h = h(is(h))^{-1} = h$$

であるのでこれは作用である。

また、 $t : s^{-1}(x) \longrightarrow G_0$ に対し、

$$s^{-1}(x) * G_1 \longrightarrow s^{-1}(x)$$

を $(h, k) \mapsto k^{-1}h$ により定義すると、上記と同様に作用となる。そして、

$$(g, h, k) \in s^{-1}(x) \cap t^{-1}(x) * s^{-1}(x) * G_1$$

に対し、 $(gh)k = (hg^{-1})k = k^{-1}(hg^{-1}) = (k^{-1}h)g^{-1} = g(k^{-1}h) = g(hk)$ であるので $s^{-1}(x)$ は (Γ_x, G) -bibundle である。あとは left and right principal であるかどうかであるが、

まず右作用から見ていく。 $t : s^{-1}(x) \longrightarrow G_0$ は G が transitive であるから全射である。また $s^{-1}(x) \longrightarrow \{x\}$ の fiber は $s^{-1}(x)$ であることに注意する。作用 $G * s^{-1}(x) \longrightarrow s^{-1}(x)$ を考えると、任意の $h \in s^{-1}(x)$ に対し、

$$\text{Iso}_h(G) = \{k \in G_1 \mid k^{-1}h = h\}$$

を考えると、

$$k = (hh^{-1})k = h(h^{-1}k) = hh^{-1} = it(h) = it(k)$$

であり、自由である。さらに、 $h_1, h_2 \in s^{-1}(x)$ に対し、 $k = h_2 h_1^{-1} \in G_1$ に対し、 $t(k) = t(h_2)$ なので、

$$h_2 k = k^{-1} h_2 = h_1 h_2^{-1} h_2 = h_1$$

であり、よってこの作用は推移的である。

そして、左を見ていく。 s は明らかに全射である。 $i(x) \in s^{-1}(x)$ でも取ればよい。そして作用

$$s^{-1}(x) \cap t^{-1}(x) \times s^{-1}(x) \longrightarrow s^{-1}(x)$$

は $(g, h) \mapsto hg^{-1}$ であったが任意の $y \in G_0$ に対し、moment map の fiber は $s^{-1}(x) \cap t^{-1}(y)$ であるので、

$$s^{-1}(x) \cap t^{-1}(x) \times s^{-1}(x) \cap t^{-1}(y) \longrightarrow s^{-1}(x) \cap t^{-1}(y)$$

を考えたとき、任意の $h \in s^{-1}(x) \cap t^{-1}(y)$ に対し、

$$\text{Iso}_h(\Gamma_x) = \{g \in s^{-1}(x) \cap t^{-1}(y) \mid hg^{-1} = h\}$$

であるが、 $g = g(h^{-1}h) = (gh^{-1})h = h^{-1}h = is(h) = i(x)$ であり作用は自由である。また、 $h_1, h_2 \in s^{-1}(x) \cap t^{-1}(y)$ に対し、 $g = h_1^{-1}h_2 \in s^{-1}(x) \cap t^{-1}(x)$ を考えると、

$$gh_2 = h_2 g^{-1} = h_2 (h_2^{-1} h_1) = h_1$$

なので推移的である。よって、 Γ_x と G は Morita equivalent である。

□